数理解析研究所講究録
53巻 1968年 42-57

Brauer group Bの1.

東大理　石橋康徳

§1. 位相空間のBrauer group.

(1.1)

Xを位相空間とし、$\mathcal{O}_X$をX上の複素数値連続関数のgermsのsheafとする。$\mathcal{O}_X$はX上のsheaf of ringsである。

任意の自然数nに対して、$\mathcal{P}_n(X)$でfibreが$M_n(\mathbb{C})$であるX上の局所自明なalgebra bundlesの同型類の集合を表わす。

これは次のように解釈される。

$\mathcal{P}_n(X)$はsheaf $M_n(\mathcal{O}_X)$に局所同型であるX上のsheaf of algebrasの同型類の集合である。

$GP(n) = GL(n, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^*$とおけば、Skolem-Noetherの定理によってalgebra $M_n(\mathbb{C})$の自己同型群は$GP(n)$に同型となるから$\mathcal{P}_n(X)$は次のように解釈することもできる。

$\mathcal{P}_n(X) = H^1(X, GP(n))$である。即ち、$X$上のgroup $GP(n)$のprincipal bundlesの同型類の集合である。

(1.2)

位相空間XのBrauer groupは$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(X)$において、次のよう

なものを自明と見なすことによって得られる。

algebra bundles の場合：

E を X 上の rank n の vector bundle とするとき，$\underline{\mathrm{End}}(E)$ という形の algebra bundle。

sheaf of algebras の場合：

$\mathcal{E}$ を X 上の rank n の locally free sheaf とするとき，$\underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E})$ という形の sheaf of algebras。

principal bundles の場合：

$H^2(X, GL(n))$ の元で $H^1(X, GL(n))$ からきているもの。

$M_n(\mathcal{O}_X)$ に局所同型な X 上の sheaf of algebras を X 上の Azumaya's algebra という。$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を二つの Azumaya's algebras とするとき，$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ であるとは，X 上の locally free sheaves $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ が存在して，algebras として $\mathcal{A} \otimes \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E})$ と $\mathcal{A}' \otimes \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E}')$ が同型になるときをいう。$\underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E}) \otimes \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E}') \cong \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$ だから $\sim$ は equivalence relation である。さらに $\sim$ と operation $\otimes$ とは compatible である。したがって，X 上の Azumaya's algebras の同値類の集合は commutative monoid になる。実は群になる。それは $\mathcal{A}^\circ$ を $\mathcal{A}$ の opposite algebra とすると，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^\circ \cong \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-mod}}(\mathcal{A})$ となるからである。$\mathcal{A}^\circ$ の class が $\mathcal{A}$ の class の逆元になる。このようにして得られた group を X の Brauer group といい，$Br(X)$ と表わす。

(1.3)

$\mathbb{G}_{m_X}$ で $\mathcal{O}_X$ の units の sheaf を表わす。

groups の exact sequence : $1 \longrightarrow k^* \longrightarrow Gl(n) \longrightarrow GP(n) \longrightarrow 1$ は、X 上の sheaves の exact sequence : $1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m_X} \longrightarrow \underline{Gl}(n)_X \longrightarrow \underline{GP}(n)_X \longrightarrow 1$ を与える。これから次の cohomology groups の exact sequence を得る。

$$1 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_{m_X}) \longrightarrow H^1(X, \underline{Gl}(n)_X) \longrightarrow H^1(X, \underline{GP}(n)_X) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{G}_{m_X}).$$

$1 \to H^1(X, \mathbb{G}_{m_X}) \to H^1(X, \underline{Gl}(n)_X)$ が exact となるのは、$H^0(X, \underline{Gl}(n)_X) \longrightarrow H^0(X, \underline{GP}(n)_X)$ が surjective だからである。

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ を Azumaya's algebras とするとき、$\delta(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}') = \delta(\mathcal{A})\,\delta(\mathcal{A}')$ となることは容易に確められる。

PROPOSITION (1.4)

1°. $\mathcal{A}$ を Azumaya's algebra とするとき、$\delta(\mathcal{A})$ は $Br(X)$ における $\mathcal{A}$ の class だけで定まる。

2°. 1°によって定義される写像 $\delta : Br(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{G}_{m_X})$ は group homomorphism である。

3°. 2°の homomorphism は injective である。

4°. $P_n(X) = H^1(X, \underline{GP}(n)_X)$ の $Br(X)$ における image は n によって零化される。

(証明) 1°〜3°は明らかである。

4°. 次の exact sequence を考える。

$$1 \longrightarrow \underline{\mu}_{n_X} \longrightarrow \underline{Sl}(n)_X \longrightarrow \underline{GP}(n)_X \longrightarrow 1 .$$

ここに，μ_n は 1 の n 乗根の群で，$SL(n)$ は special linear group である。

この exact sequence から，coboundary map $\delta' : H^1(X, GL(n)_X) = P_n(X) \to H^2(X, \mu_{nX})$ を得る。ところが，δ は $P_n(X) \xrightarrow{\delta'} H^2(X, \mu_{nX}) \to H^2(X, G_{mX})$ と分解する。$H^2(X, \mu_{nX})$ は n によって零化されるので，かくして 4° は証明された。

上の 4° から分るように $Br(X)$ は torsion group である。実は X が finite CW-complex のときには，(1.4) 2° の homomorphism $\delta : Br(X) \longrightarrow H^2(X, G_{mX})$ $(\cong H^3(X, \underline{Z}))$ は，$Br(X)$ と $H^2(X, G_{mX})$ の torsion part との同型を与えることが分る。(Serre)

§2. 体上の central simple algebras.

体 k 上の central simple algebra を k 上の Azumaya's algebra という。

PROPOSITION (2.1)

A を k 上の Azumaya's algebra とする。すると $[A : k] = r^2$ とかける。L を A の subalgebra とするとき，次の条件は同値である。

(i). L は k 上 étale (即ち L は k の finite separable extensions の有限個の直和) で，$[L : k] = r$ である。

(ii). L は k 上 étale で，$V_A(L) = L$ である。

但し，$V_A(L) = \{ x \in A \mid xy = yx \text{ for every } y \in L \}$ である。

(iii) L は A の maximal commutative étale subalgebra である。

(iv) Ω を代数閉体である k の拡大体とするとき、isomorphism $A_\Omega (=A\otimes_k \Omega) \cong M_r(\Omega)$ で、L_Ω を対角行列から成る $M_r(\Omega)$ の subalgebra に変換するものが存在する。

(証明)

環論でよく知られた事実なので省略する。

以下この節の結果はすべて環論でよく知られた事実だから証明を省略する。

PROposition (2.2)

(2.1) の条件の下に、$L=k[x]$ が A の maximal commutative étale subalgebra となるような元 $x\in A$ が存在する。

PROposition (2.3)

A を k 上の Azumaya's algebra とし、L を A の maximal étale subalgebra とする。$[A:k]=r^2$ とする。

このときには A は rank r の free L-module である。(left あるいは right L-module として。)

PRoposition (2.4)

A を k 上の Azumaya's algebra とする。L は A の commutative subalgebra で、right L-module A は free で rank r をもつとする。V を dimension r の A の underlying L-vector space とする。次のような L-algebras の homomorphism $v: A\otimes_k L \to \mathrm{End}_L(V)$

を与える。v の $A \otimes_k L$ への制限は，A の regular representation $u(x)(y) = xy$ によって与えられる k-algebra homomorphism $u : A \longrightarrow \mathrm{End}_L(V)$ である。

このときには，v は isomorphism で $A \otimes_k L \cong M_r(L)$ となる。

Corollary (2.5)

A を k 上の Azumaya's algebra とし，L を A の maximal étale subalgebra とする。$[A : k] = r^2$ とする。

このときには，(2.4) の canonical homomorphism v は isomorphism である。したがって，$A_L \cong M_r(L)$ である。

PROPOSITION (2.6)

Λ を artinian local ring とし，k を Λ の residue field とする。A_0 を k 上の central simple algebra とする。

このときには，次の条件を満足する k-algebra A が同型を除いて高々一つ存在する。

(i) A は free Λ-module である。

(ii) $A \otimes_\Lambda k \cong A_0$ である。

特に，$A_0 \cong M_r(k)$ ならば $A \cong M_r(\Lambda)$ である。

§3. Azumaya's algebras over a prescheme.

Theorem (3.1)

X を prescheme とし，$\mathcal{A}$ を X 上の sheaf of algebras で $\mathcal{O}_X$-module として finite presentation であるとする。

次の条件は同値である。

(i). $\mathcal{A}$ は locally free $\mathcal{O}_X$-module で 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$ は $\kappa(x)$ 上の central simple algebra である。

(ii). $\mathcal{A}$ は locally free $\mathcal{O}_X$-module で natural homomorphism : $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{\circ} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-mod}}(\mathcal{A})$ は bijective である。

(iii). 任意の $x \in X$ に対して, $\mathcal{A}_{U'} \cong M_r(\mathcal{O}_{U'})$ となるような整数 $r \geq 1$ と, x の開近傍 U と, finite étale surjective morphism $U' \to U$ が存在する。

(iii)′ 任意の $x \in X$ に対して, $\mathcal{A}_{U'} \cong M_r(\mathcal{O}_{U'})$ となるような整数 $r \geq 1$ と, x の開近傍 U と, surjective morphism $U' \to U$ が存在する.

(証明)

(i) $\rightleftarrows$ (ii), (iii)′ $\to$ (i), (iii) $\to$ (iii)′ は明らかである。したがって, (i) $\to$ (iii) を示せば十分であるが これは次の (3.5) と (3.7) からしたがう。

Corollary (3.2)

$\mathcal{A}$ によって定義される X の étale site X_{et} 上の algebra を再び $\mathcal{A}$ で表わす. このとき (3.1) の条件は $\mathcal{A}$ が X_{et} 上の Azumaya's algebra ということと同値である。

(証明)

$\mathcal{O}_{X_{et}}$ によって次のように定義される X_{et} 上の sheaf を表わす.

$X' \to X$ を étale morphism とするとき. $\mathcal{O}_{X_{et}}(X') = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ である。X_{et} 上の algebra が Azumaya's algebra であるとは. 各 i に対し $\mathcal{A}_{X_i} \cong M_r(\mathcal{O}_{X_{et}})_{X_i}$ となるような covering family $(X_i \to X)$ が存在するときをいう。このことと. (3.1) から我々の主張は証明される。

Remark (3.3)

X 上の finite presentation である modules の category と. X_{et} 上の finite presentation である modules の category は equivalent である。したがって. X_{et} 上の Azumaya's algebras の分類は (3.1) の条件を満足する X 上の algebras の分類と同値である。このような algebra を X 上の Azumaya's algebra という。

PROPOSITION (3.4)

$\mathcal{A}$ は X 上の algebra で (3.1) の同値な条件 (i), (ii) をみたすものとする。$\mathcal{A}$ は constant rank r^2 をもつとし. Σ は X 上の finite étale algebra とする。即ち Σ は commutative $\mathcal{O}_X$-algebra で. $\mathcal{O}_X$-module として locally free. さらに任意の $x \in X$ に対して. $\Sigma(x) = \Sigma_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$ は $\kappa(x)$ 上の étale algebra である。

さらに Σ は至る所 rank r をもち. $u : \Sigma \to \mathcal{A}$ は algebras の homomorphism で 任意の $x \in X$ に対して. $u(x) : \Sigma(x) \to \mathcal{A}(x)$ は injective とする。

このときには.

(i) Σ は $\mathcal{O}_X$-module として. 局所的に $\mathcal{A}$ の直和因子である。

(ii) $\mathcal{A}$ は rank r の locally free $\mathcal{L}$-module である。

(iii) natural homomorphism : $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}\longrightarrow \underline{End}_{\mathcal{L}}(\mathcal{V})$ は bijective である。

但し、$\mathcal{V}$ は $\mathcal{A}$ の underlying $\mathcal{L}$-module である。

(証明)

容易だから省略する。

Corollary (3.5)

(3.4)の条件の下に、$X=\mathrm{Spec}(\mathcal{L})$ とおき、$\mathcal{E}'$ によって $\mathcal{L}$-module $\mathcal{V}$ によって定義される $\mathcal{O}_{X'}$-module を表わす。このときには、$\mathcal{A}_{X'}\cong \underline{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}')$ である。

(証明)

E.G.A. II (1.5.7) から $\mathcal{A}_{X'}\cong(\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L})^{\sim}$ である。一方 E.G.A. II (1.4.8.2) から $\mathcal{A}(\underline{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}'))=\underline{End}_{\mathcal{L}}(\mathcal{V})$ である。したがって、(3.4)から、$\mathcal{A}_{X'}\cong\underline{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}')$ を得る。

Definition (3.6)

$\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya's algebra とし、$\mathcal{L}$ を $\mathcal{A}$ の subalgebra とする。このとき、$\mathcal{L}$ が $\mathcal{A}$ の maximal étale subalgebra であるとは、$\mathcal{L}$ が X 上 étale で、inclusion : $\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{A}$ が X の各点で(3.4)の条件を満足するときをいう。

$\xi\in\Gamma(X,\mathcal{A})$ とする。ξ が regular であるとは、ξ が $\mathcal{A}$ の maximal étale subalgebra を生成するときをいう。

Theorem (3.7)

$\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya's algebra とすると、任意の $x \in X$ に対して、x の開近傍 U と $\mathcal{A}|U$ の maximal étale subalgebra $\mathcal{L}$ が存在する。

(証明)

これは (2.2) と次の lemma から容易にしたがう。

Lemma (3.8)

X を prescheme とし、$\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya's algebra とする。

$\xi \in \Gamma(X, \mathcal{A})$ とし、$x \in X$ とする。$\xi(x) = \xi_x \otimes 1 \in \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_x \otimes \kappa(x)$ が regular ならば $\xi|U$ が regular となるような x の開近傍 U が存在する。

(証明)

容易に $X = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ が local で x がその closed point である場合に帰着される。

このときには $\mathcal{A} = \tilde{A}$ とかける。A は Λ-algebra で Λ-module として free である。$\xi \in A$ である。Λ の maximal ideal を $\mathfrak{m}$ とすれば $A \otimes \Lambda/\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}A$ は central simple $\Lambda/\mathfrak{m}$-algebra である。$[A/\mathfrak{m}A : \Lambda/\mathfrak{m}] = r^2$ とおく。仮定によって $\xi \in A/\mathfrak{m}A$ は regular である。即ち $\Lambda/\mathfrak{m}[\xi]$ は $A/\mathfrak{m}A$ の maximal étale subalgebra である。したがって $\Lambda/\mathfrak{m}[\xi]$ は $\Lambda/\mathfrak{m}$ 上 étale で、rank r である。このとき $\Lambda[\xi]$ が A の maximal étale subalgebra

になることを証明したい。

Λ は noetherian local subrings Λ_α の inductive limit で しかも Λ_α の maximal ideal を $\mathfrak{m}_\alpha$ とすると $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{m}_\alpha$ とかける。したがって $\Lambda/\mathfrak{m} = \varinjlim (\Lambda_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha)$ となる。それ故 α を十分大きくとれば $\Lambda_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha[\xi]$ は $\Lambda_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha$ 上 étale で rank r になる。このとき $\Lambda_\alpha[\xi]$ が Λ_α 上 étale で Λ_α-module として free of rank r なることが証明されればよい。（また Λ が noetherian としてよい。）このためには、$\mathfrak{B} = \Lambda\cdot 1 + \Lambda\cdot\xi + \cdots + \Lambda\cdot\xi^{r-1}$ が ring になることが証明できればよい。それには $\xi^r \in \mathfrak{B}$ を証明すればよい。

Λ は artinian と仮定できる。

∵ artinian local ring のときに証明できたとすれば $\xi^r \in \mathfrak{B}/\mathfrak{m}^n\mathfrak{B}$ だから $\xi^r - a_n \in \mathfrak{m}^n\mathfrak{B}$ となる $a_n \in \mathfrak{B}$ が存在する。上の証明から分るように既に Λ は noetherian local ring の場合には帰着されている。したがって $\xi^r \in \hat{\mathfrak{B}} = \hat{\Lambda}\mathfrak{B}$ である。ところが $\mathfrak{B}$ は A の直和因子だから $\xi^r \in \hat{\mathfrak{B}} \cap A = \mathfrak{B}$ である。かくして Λ が artinian local ring の場合に帰着された。

ところが artinian local ring の場合には $A \cong M_r(\Lambda)$ とできる。

∵ L は $\Lambda/\mathfrak{m}$ の finite separable extension で central simple algebra $A/\mathfrak{m}A$ を split するものとせよ。$L = \Lambda/\mathfrak{m}(\theta)$ とかける。θ を根にもつ $\Lambda/\mathfrak{m}$ 上の monic irreducible polynomial を f とし、F を

Λに係数をもつpolynomialで $\bar{F}=f$ in $\Lambda/\mathfrak{m}[X]$ なるものとする。$\Lambda_1=A[X]/(F)$ とおく。$\Lambda_1/\mathfrak{m}\Lambda_1=L$ だから Λ_1 は $\mathfrak{m}\Lambda_1$ をmaximal idealにもつlocal ringである。$\xi^r\otimes 1\in\mathfrak{a}\otimes_\Lambda\Lambda_1$ がいえれば $\xi^r\in\mathfrak{a}\Lambda_1\cap A=\mathfrak{a}$となる。したがって $A_0\cong A\otimes_\Lambda k\cong M_r(k)$の場合に帰着できた。したがって(2.6)から $A\cong M_r(\Lambda)$ となる。この場合には Hamilton-Cayleyの定理から $\xi^r\in\mathfrak{a}$ となる。

Theorem (3.9)

$\mathcal{A}$をX上のAzumaya's algebraとし、uを$\mathcal{A}$のautomorphismとする。このときには、Zariski topology (したがって、étale topology) に関して、局所的にuはinnerである。即ち局所的に $u(x)=axa^{-1}$とかける。

ここに、aは$\mathcal{A}$のinvertible sectionで、$\mathcal{O}_X^*$のsectionによるmultiplicationを法として、一意的に決定される。

(証明)

任意の $x\in X$に対して、u_xをuによって引き起される$\mathcal{A}_x$のautomorphismとする。このときには、Auslander-Goldmanの結果から$\mathcal{A}_x$の$\mathcal{O}_x$-algebra automorphismはinnerである。したがって、xの開近傍 $U=\mathrm{Spec}(R)$と、$a\in\Gamma(U,\mathcal{A})^*$が存在して、$u_x(\alpha_x)=a_x^{-1}\alpha_x a_x$ $(\alpha_x\in\mathcal{A}_x)$とかける。ところが AはR-module of finite presentationだから $f\in R-\mathfrak{p}$ が存在して u_fはA_fの inner automorphismとなる。aが$\mathcal{O}_X^*$のsectionによるmultiplicationを除

いて決定されることは明らかである。

Theorem (3.10)

(i) associative algebra $M_r(\mathcal{O}_X)$ の automorphisms の scheme は projective group $\underline{GP}(r)_X$ に同型である。

(ii) X 上の rank r^2 の Azumaya's algebras の分類は étale topology (あるいは f.p.q.c. topology) の意味での group $\underline{GP}(r)_X$ の X 上の principal homogeneous bundles の分類に同値である。即ち X 上の rank r^2 の Azumaya's algebras は $H^1(X_{ét}, \underline{GP}(r)_X) = H^1(X_{pq}, \underline{GP}(r)_X)$ で分類される。

(証明)

(i) (3.9) から明らかである。

(ii) $\mathcal{A}$ を X 上の rank r^2 の Azumaya's algebra とすると、étale covering family $(X_i \to X)$ が存在して、$\mathcal{A}_{X_i} \overset{\varphi_i}{\cong} M_r(\mathcal{O}_{X_{ét}})_{X_i}$ となる。family $\{g_{ji}\}$ ($g_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : M_r(\mathcal{O}_{X_{ét}})_{X_i \times_X X_j} \cong M_r(\mathcal{O}_{X_{ét}})_{X_i \times_X X_j}$) は明らかに cocycle condition を満足する。(i) から $g_{ji} \in \underline{GP}(r)_X(X_i \times_X X_j)$ だから、$\{g_{ji}\}$ は $H^1(X_{ét}, \underline{GP}(r)_X)$ の元を与える。しかも同型なものは cobounding cycle だけ異なるということは容易に分るので Azumaya's algebras の同型類の集合から $H^1(X_{ét}, \underline{GP}(r)_X)$ の中への対応を得た。

逆に $H^1(X_{ét}, \underline{GP}(r)_X)$ の元が X 上の rank r^2 の Azumaya's algebra を与えることは faithfully flat, quasi-compact descent の理論か

ら明らかである。

$H^1(X_{et}, \underline{GP}(r)_X) = H^1(X_{pf}, \underline{GP}(r)_X)$ となることは、(3.1) から容易に分る。

Theorem (3.11)

A を henselian local ring とし、k をその residue field とする。$X = \mathrm{Spec}(A)$, $x = \mathrm{Spec}(k)$ とおく。$P_r(X)$, $P_r(x)$ をそれぞれ X, x 上の rank r^2 の Azumaya's algebras の同型類の集合とすると restriction mapping : $P_r(X) \to P_r(x)$ は bijective である。

(証明)

$P_r(X) \cong H^1(X_{et}, \underline{GP}(r)_X)$ で $\underline{GP}(r)_X$ は X 上 lisse かつ quasi-projective だからこれは non commutative Galois cohomology の一般な結果 (SGAD. XXIV. Appendix) からしたがう。

Corollary (3.12)

(3.11) の条件の下に、restriction mapping : $Br(X) \to Br(x)$ は bijective である。

(証明)

(3.11) から明らかである。

§4. Relation with the Brauer-Severi schemes.

(4.1)

$\underline{GP}(r)_X$ は projective fibre $\underline{P}_X^{r-1}$ の X-automorphisms の sheaf に同一視できる。したがって $H^1(X_{et}, \underline{GP}(r)_X) = H^1(X_{pf}, \underline{GP}(r)_X)$ は、

étale topology (あるいは f.p.q.c. topology) に関して局所的に $\mathbb{P}_X^{r-1}$ に同型である X 上の schemes $\mathbb{P}$ の同型類の集合に同一視される。このような prescheme を X 上の Brauer−Severi prescheme という。

Theorem (4.2)

$f: \mathbb{P} \to X$ を proper, flat morphism で、さらに finite presentation とする。$x \in X$ における geometric fibre $\mathbb{P}_{\bar{x}}$ が projective space $\mathbb{P}_{\overline{k(x)}}^{r-1}$ に同型になったとする。

このときには、x の開近傍 U と、finite étale surjective morphism : $U' \to U$ が存在して、$\mathbb{P} \times_X U' \underset{(U')}{\cong} \mathbb{P}_{U'}^{r-1}$ となる。

(証明)

$\mathcal{O}_{X,x} = A$ とおき、$\mathbb{P} \times_X \mathrm{Spec}(A) = \mathbb{P}'$ とおく。$\mathfrak{m}$ を A の maximal ideal とし、$k = k(x) = A/\mathfrak{m}$ とおく。

ところが $\mathbb{P}' \cong \mathbb{P}_0 \otimes_{A_0} A$ とできる。但し、A_0 は noetherian local ring で $k_0 = A_0/\mathfrak{m}_0 \hookrightarrow k = A/\mathfrak{m}$ である。

仮定によって $\mathbb{P}' \otimes_A \bar{k} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^{r-1}$ となる。E.G.A. III. (0, 10.3.1) から noetherian local ring B で、その residue field が $\bar{k}$ となり、さらに local homomorphism : $A \to B$ が存在して、B が flat A-module となるものが存在する。$(\mathbb{P}_0 \otimes_{A_0} \hat{B}) \otimes_{\hat{B}} \bar{k} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^{r-1}$ だから、Grothendieck の formal geometry の結果から、$\mathbb{P}_0 \otimes_{A_0} \hat{B} \cong \mathbb{P}_{\hat{B}}^{r-1}$ となる。$A_0 \to \hat{B}$ は faithfully flat である。したがって (3.1) と (4.1) から分るように finite étale surjective morphism : $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A_0)$ が

存在して、$P_0 \otimes_{A_0} \text{と} \cong P^{r-1}_{\text{と}}$ となる。したがって、$P' \otimes_A A' \cong P^{r-1}_{A'}$ となる。但し、$A' = A \otimes_{A_0} \text{と}$ である。$\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ は finite étale surjective morphism である。$P' \otimes_A A' \cong P \otimes_X A$ で $A = \mathcal{O}_{X,x}$ だから、x の十分小さい近傍 U をとると、finite étale surjective morphism : $U' \to U$ が存在して、$P \times_X U' \underset{(U')}{\cong} P^{r-1}_{U'}$ となる。

Corollary (4.3)

P を X 上の prescheme とする。P が X 上の Brauer-Severi prescheme となるための必要十分条件は、P が X 上 proper, flat かつ finite presentation で、その geometric fibres が projective spaces となることである。

(証明)

(4.2) から明らかである。